Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XIV, № 2

MATHEMATIK

ÜBER DIE FRAGE NACH DER EXISTENZ EINES KONVEXEN KÖRPERS, BEI DEM DIE SUMME DER HAUPTKRÜMMUNGSRADIEN EINE GEGEBENE POSITIVE FUNKTION IST, WELCHE DEN BEDINGUNGEN DER GESCHLOSSENHEIT GENÜGT

Von A. D. ALEXANDROV

(Vorgelegt von I. M. Vinogradow, Mitglied der Akademie, d. 16. XI. 1936)

Auf. S. 123 des Buches von Bonnesen u. Fenchel «Die Theorie der konvexen Körper» ist das folgende Theorem ausgesprochen, dessen Beweis die Autoren Christoffel (1) sowie auch Hurvitz (2) zuschreiben: «Zu jeder positiven, geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen genügenden Funktion $F_1(\xi)$ auf der Einheitskugel, die den Bedingungen:

$$\int \xi F_1(\xi)\, d\omega = 0 \tag{1}$$

genügt, gibt es einen konvexen Körper, für den $F_1(\xi)$ die Summe der Hauptkrümmungsradien ist*. Aber weder in den zitierten Arbeiten von Christoffel noch in denen von Hurwitz ist ein solches Theorem bewiesen oder ausgesprochen worden.

Bei Christoffel finden wir die folgende Formulierung des von ihm bewiesenen Theorems:

«Wenn die Oberfläche E eines sich nicht ins Unendliche erstreckenden Körpers allenthalben gewölbt und stetig gebogen ist, ferner in keinem Punkte derselben ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross oder unstetig ist, endlich für jedes wahre Zenith, unabhängig davon, welcher Punkt der Fläche ihm entsprechen mag, die Summe der in letzterem stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser gegeben ist, so ist die Fläche selbst und ihre Lage in der Himmelskugel völlig bestimmt, bis auf einen beliebigen mit ihr verbundenen Punkt über dessen Ort im absoluten Raume noch verfügt werden kann».

Es liegt also ein Eindeutigkeits-, aber kein Existenzsatz vor. Sei $H(\theta, \varphi)$ eine Stützfunktion einer Eläche, deren sphärisches Bild die ganze Einheitskugeloberfläche eindeutig bedeckt, und $R_1 + R_2$ die Summe ihrer Hauptkrümmungsradien, die als Funktion der geographischen Koor-

* Hier soll ξ den Einheitsvektor der Normalen bedeuten, und das Integral ist über die ganze Einheitskugeloberfläche zu erstrecken.

dinaten θ und φ auf dem sphärischen Bild vorgegeben ist. Bekanntlich besteht die folgende Gleichung:

$$R_1 + R_2 = \Delta H + 2H, \tag{2}$$

wo Δ den zweiten Beltramischen Differentialoperator bezüglich der Kugel bedeutet.

Sei b_l der Koeffizient einer Kugelfunktion der l-ten Ordnung in der Entwicklung von $R_1 + R_2$, und a_l der entsprechende Koeffizient in der Entwicklung von H. Bekanntlich besteht die folgende Relation:

$$a_l = -\frac{1}{(l-1)(l+2)} b_l. \tag{3}$$ [3]

Setzen wir $R_1 + R_2 = 4\cos\theta + 1$. Diese Funktion ist positiv, analytisch und genügt der Bedingung (1), was man leicht verifiziert; denn diese Bedingung ist mit der Orthogonalität von $R_1 + R_2$ und der Kugelfunktion erster Ordnung gleichbedeutend.

Die Legendresche Poliynome sind:

$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}.$$

Also

$$R_1 + R_2 = 4\cos^2\theta + 1 = \frac{8}{3}P_2 + \frac{7}{3}P_0, \tag{4}$$

und nach (3) ist

$$H = -\frac{2}{3}P_2 + \frac{7}{6}P_0 = -\cos^2\theta + \frac{3}{2}. \tag{5}$$

Da $R_1 + R_2$ von φ nicht abhängt, so ist H eine Stützfunktion der Rotationsfläche, also auch die Stützfunktion ihres Meridians.

Wenn $H(\theta)$ die Stützfunktion und R den Krümmungshalbmesser der Kurve bedeuten, so ist, wie bekannt:

$$R = H + H''. \tag{6}$$

Setzen wir in diese Formel die Funktion (5) ein, so bekommen wir:

$$R = \cos^2\theta - 2\sin^2\theta + \frac{3}{2}. \tag{7}$$

Wenn $\theta = 0$ ist, so bekommt $R = \frac{5}{2}$, aber, wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist $R = -\frac{1}{2}$. Also ändert der Krümmungshalbmesser des Meridians sein Zeichen, was fur eine konvexe Fläche unmöglich ist.

In dieser Weise ist das von Bonnesen und Fenchel ausgesprochene Theorem widerlegt. Es erhebt sich also eine tiefe und verallgemeinerungsfähige Frage über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, welchen die Eunktion $F_1(\xi)$, um der Summe der Hauptkrümmungsradien eines konvexen Körpers gleich zu sein, genügen muss.

Institut für Mathematik und Mechanik
an der Universität Leningrad

Eingegangen
d. 16. XI. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] Christoffel, Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben, Ges. Math. Abh., I, 162, oder Journ. f. reine u. angew. Math., **64**, 193—209 [1865]. [2] Hurwitz, Ann. de l'École Normale **3**, 19, 357—408, besonders 401—408; Vgl. auch Blaschke, Differentialgeometrie, 1, 95, Dritte Auflage (1930). [3] Bonnesen, u. Fenchel, Ergebnisse der Math. (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XIV, № 2

MATHÉMATIQUES

ESSAI D'UNE DÉFINITION GÉNÉRALE DE L'INTÉGRALE

Par V. GLIVENKO

(Présenté par I. M. Vinogradow, de l'Académie, le 20. XI. 1936)

1. Soit A un système d'ensembles X d'éléments quelconques x; supposons que ce système est analytique; cela veut dire que quels que soient les deux ensembles X_1 et X_2, de A, on peut trouver dans A un ensemble X contenu simultanément dans X_1 et dans X_2. Soit $f(x)$ une fonction définie dans A et dont les valeurs sont des nombres réels. Supposons qu'il existe un nombre a jouissant de la propriété suivante: quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver dans A un ensemble X tel que pour tout élément x de X, on a $|a - f(x)| < \varepsilon$. Ceci étant, nous appellerons le nombre a limite de $f(x)$ dans A [cf. (1)] et nous le désignerons simplement par $f(A)$.

2. Soit, en particulier, A un système analytique d'ensembles X, dont les éléments x sont des systèmes finis de nombres réels:

$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

n pouvant varier avec x. Les éléments d'un tel système x peuvent d'ailleurs être des nombres égaux. Posons:

$$S(x) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

La limite $S(A)$, si elle existe, sera nommée intégrale des nombres formant le système A.

3. Soit, par exemple, E un ensemble mesurable (borné ou non) de nombres réels ξ et soit $\varphi(\xi)$ une fonction mesurable (bornée ou non) définie dans E. Considérons tous les systèmes possibles d'un nombre fini d'ensembles fermés disjoints $F_1, F_2, \ldots, F_n$ contenus dans E et dans chacun desquels la fonction $\varphi(\xi)$ est continue, et soient M_i et m_i respectivement le maximum et le minimum de $\varphi(\xi)$ dans F_i, et a_i un nombre choisi arbitrairement dans l'intervalle:

$$(m_i \operatorname{mes} F_i, \quad M_i \operatorname{mes} F_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Convenons de dire que le système $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ précède le système $x' = (a'_1\, a'_2, a'_{n'})$, si le système x correspond aux ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_n$ et

le système x' correspond aux ensembles $F'_1, F'_2, \ldots, F'_{n'}$, où l'on a:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{n'} \operatorname{mes} F'_i$$

et

$$\max_{i=1,\ldots,n} (M_i - m_i) \geqslant \max_{i=1,\ldots,n'} (M'_i - m'_i).$$

Désignons par $X(x)$ l'ensemble de tous les systèmes x' précédés par x, et par A le système de tous les ensembles $X(x)$. Il est aisé de voir que le système A est analytique, la limite $S(A)$ existe dans le cas et dans ce cas seulement ou la fonction $\varphi(\xi)$ est sommable, et l'on a:

$$S(A) = \int_E \varphi(\xi)\, d\xi.$$

D'une manière analogue, on voit que la définition générale de l'intégrale donnée si-dessus embrasse comme cas particuliers les définitions proposées par Radon (2), Fréchet (3) et Kolmogoroff (4).

4. Soit, comme précédemment, A un système analytique d'ensembles X dont les éléments x sont des systèmes finits de nombres réels, $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Formons une transformation TA du système A en remplaçant tout nombre a_i par un nombre Ta_i. Convenons de dire que cette transformation est infinitésimale, si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble X, de A, tel que, pour tous les éléments $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de X, on a:

$$|Ta_i - a_i| < \varepsilon |a_i| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Théorème I. *Si TA est une transformation infinitésimale de A et s'il existe une constante M telle que pour tous les $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$*

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < M,$$

on a:

$$S(TA) = S(A);$$

l'existence du second membre de cette égalité entraîe celle du premier.

C'est la généralisation d'un principe de substitution des infiniment petits sur lequel repose la plupart des applications du calcul intégral en géométrie, en méchanique et en physique.

Théorème II. *Si TA, T_1A, T_2A sont des transformations de A telles que, pour tous les $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$,*

$$Ta_i = T_1 a_i + T_2 a; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a:

$$S(TA) = S(T_1 A) + S(T_2 A),$$

l'existence du second membre de cette égalité entraîne celle du premier.

Cette proposition embrasse à la fois les deux propriétés fondamentales des intégrales, à savoir:

$$\int_E [\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)]\, d\xi = \int_E \varphi_1(\xi)\, d\xi + \int_E \varphi_2(\xi)\, d\xi$$

et

$$\int_{E_1+E_2} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{E_1} \varphi(\xi)\, d\xi + \int_{E_2} \varphi(\xi)\, d\xi \qquad (E_1 E_2 = 0).$$

5. Prenons un ensemble X du système A, considérons toutes les paires d'éléments x', x'' de X et posons:

$$\sigma(X) = \sup |S(x') - S(x'')|.$$

Considérons ensuite tous les ensembles X de A et posons:

$$\sigma(A) = \inf \sigma(X).$$

Pour qu'il existe l'intégrale $S(A)$, *il faut et il suffit qu'on ait* $\sigma(A) = 0$.

C'est la généralisation de la condition bien connue de Riemann pour l'existence de l'intégrale au sens de Riemann.

Institut des Mathématiques
de l'Université de Moscou.

Manuscrit reçu
le 20. XI. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] D. Kryjanowsky, Naukowi zapiski naukowo-doslidčich katedr Odesi, 1 (1924). [2] J. Radon, Sitzungsber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, Abt. II a, 122 (1913). [3] M. Fréchet, Bull. de la Soc. Math. de France, 43 (1915). [4] A. Kolmogoroff, Math. Ann., 103 (1930).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XIV, № 2

MATHEMATIK

EIN VERFAHREN ZUR GLEICHZEITIGEN APPROXIMATIVEN BESTIMMUNG VON EIGENWERT UND EIGENFUNKTION*

Von W. ROMBERG

(Vorgelegt von S. N. Bernstein, Mitglied der Akademie, d. 24. XI. 1936)

Um den tiefsten Eigenwert E° einer selbstadjungierten linearen Differentialgleichung:

$$H(\psi) - E \cdot \gamma(q_i) \cdot \psi = 0 \qquad (q_i = q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots), \tag{1}$$

zu bestimmen, wird mit Erfolg das Ritzsche Näherungsverfahren verwendet. Aber nur in speziellen Fällen ist bewiesen, dass auch die Näherungsfunktionen ψ_N mit wachsenden N gegen die Eigenfunktionen ψ° konvergieren.

Wir wollen hier ein Verfahren angeben, welches die gleiche Vorteile schneller Konvergenz bietet, wie das Ritzsche Verfahren, aber nicht nur für die Eigenwerte, sondern auch für die Eigenfunktionen. Voraussetzen müssen wir nur noch, dass eine wenn auch noch so tiefe untere Schranke $-S$ für den Eigenwert E° bekannt ist, also

$$-S < E^\circ. \tag{2}$$

Zunächst verwandeln wir (1) in eine Differentialgleichung mit nur positiven Eigenwerten:

$$h(\psi) - e \cdot \chi(q_i) \cdot \psi = 0, \tag{3}$$

indem wir

$$h(\psi) = H(\psi) + S \cdot \chi(q_i) \cdot \psi, \tag{4}$$

und

$$e = E + S$$

setzen. Die Eigenfunktionen von (1) sind die gleichen, wie von (3); der tiefste Eigenwert $e^\circ = E^\circ + S$ ist nach (2) stets positiv.

---

* Dieser Artikel wird mit Verspätung veröffentlicht, weil das dem Akademiker S. N. Bernstein zum Gutachten abgesandte Original verloren gegangen ist.

Wir definieren zwei Variationsprobleme:

$$\left.\begin{aligned} e(f,\ f) &= \frac{\int f \cdot h(f)\, d\tau}{\int f \cdot \chi \cdot f\, d\tau} = \min \\ \text{und} \\ \eta(g,\ g) &= \frac{\int \left[\frac{h(g)}{\chi}\right]^2 \cdot \chi\, d\tau}{\int g^2 \cdot \chi\, d\tau} = \min \quad \left(d\tau = \prod_i dq_i\right)\cdot \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Randbedingungen seien die gleichen, wie in (1).

Wie wir sehen werden, ist das erste Problem genau dasjenige, welches gewöhnlich dem Ritzschen Verfahren zu Grunde gelegt wird, während wir uns auf das rechte stützen werden. Unsere Variationsprobleme (5) fassen wir vorübergehend zusammen

$$\lambda(f,\ f) = \frac{\int F(f)\, d\tau}{\int \chi \cdot f^2 d\tau} = \min.$$

Die Forderung $\delta\lambda(f,\ f) = 0$ führt, wenn wir $\int f^2 \chi\, d\tau \neq 0$ voraussetzen, auf

$$\delta \int F(f)\, d\tau - \frac{\int F(f)\, d\tau}{\int f^2 \cdot \chi\, d\tau} \cdot \delta \int \chi \cdot f^2 d\tau = 0$$

oder

$$\delta \int F(f)\, d\tau - \lambda(f,\ f) \cdot \delta \int \chi \cdot f^2 d\tau = 0. \quad (6)$$

Jetzt suchen wir zu den Variationsproblemen (5) die zugehörigen Eulerschen Differentialgleichungen auf; für das erste gilt nach (6)

$$0 = \delta \int f \cdot h(f)\, d\tau - e(f,\ f) \cdot \delta \int \chi \cdot f^2 d\tau =$$
$$2 \cdot \int (\delta f)[h(f) - e(f,\ f) \cdot \chi \cdot f]\, d\tau + \int [f \cdot \delta h(f) - h(f) \cdot \delta f]\, d\tau.$$

Das zweite Integral rechts verschwindet; denn aus der Linearität von H folgt die Linearität von h in f, so dass $\delta h(f) = h(\delta f)$; wir erhalten, bei Ersatz von h durch $H + S \cdot \chi$

$$\int [fH(\delta f) - (\delta f) \cdot H(f)]\, d\tau + \int [f \cdot S \cdot \chi \cdot \delta f - \delta f \cdot S \cdot \chi \cdot f]\, d\tau = 0,$$

da H als selbstadjungiert vorausgesetzt war. Aus

$$\int (\delta f) \cdot [h(f) - e(f,\ f) \cdot \chi \cdot f]\, d\tau = 0$$

folgt als Euler-Gleichung $h(f) - e(f,\ f) \cdot \chi \cdot f = 0$. Unser Variationsproblem $e(f,\ f) = \min$ ist dasjenige, dessen Euler-Gleichung die gegebene Differentialgleichung ist; $e(f,\ f) = \min$ ist also dasjenige Variationsproblem, welches stets dem Rizschen Verfharen zu Grunde gelegt wird. Nebenbei gewannen wir die Extremumseigenschaft der Eigenwerte: das kleinste aller $e(f,\ f)$ ist e^0.

Das andere Variationsproblem $\eta(f, f) = \min$ ergibt nach (6)

$$0 = \delta \int [h(f)]^2 \cdot \frac{1}{\chi}\, d\tau - \eta(f, f)\, \delta \int f^2 \cdot \chi\, d\tau =$$
$$= 2 \int (\delta f) \Big[h\Big(\frac{1}{\chi} \cdot h(f)\Big) - \eta(f, f) \cdot \gamma \cdot f \Big] d\tau +$$
$$+ 2 \int \Big[\frac{1}{\chi} h(f) \cdot \delta h(f) - (\delta f) \cdot h\Big(\frac{1}{\chi}\Big) h(f) \Big] d\tau.$$

Mit $\delta h(f) = h(\delta f)$ folgt für das zweite Integral

$$\int \Big[\Big(\frac{h(f)}{\chi}\Big) H(\delta f) - (\delta f) \cdot H\Big(\frac{h(f)}{\chi}\Big) \Big] d\tau +$$
$$+ \int \Big[\frac{h(f)}{\chi} \cdot S \cdot \gamma \delta f - \delta f \cdot S \cdot \chi \cdot \frac{h(f)}{\chi} \Big] d\tau = 0$$

wieder wegen der Selbstadjungiertheit von H. Die Differentialgleichung des zweiten Variationsproblems lautet daher:

$$h\Big(\frac{1}{\chi} \cdot h(\psi)\Big) - \eta(\psi, \psi) \cdot \chi \cdot \psi = 0. \tag{7}$$

Wo liegt das tiefste η° aller $\eta(\psi, \psi)$?
Aus der Schwarzschen Ungleichung:

$$\int \Big[\frac{h(\varphi)}{\chi} \Big]^2 \chi\, d\tau \cdot \int \varphi^2 : \chi\, d\tau \geqq \Big[\int \varphi h(\varphi)\, d\tau \Big]^2,$$

folgt für jede Funktion φ:

$$\eta(\varphi, \varphi) \geqq [e(\varphi, \varphi)]^2; \tag{8}$$

das kleinste aller $e(\varphi, \varphi)$ war $e^\circ > 0$, also ist das kleinste η° aller $\eta(\varphi, \varphi)$ sicher nicht kleiner als $(e^\circ)^2$.

Andererseits gibt es eine Eigenfunktion ψ°, für welche

$$h(\psi^\circ) - e^\circ \cdot \chi \cdot \psi^\circ = 0$$

ist. Berechnen wir mit diesem ψ° das $\eta(\psi^\circ, \psi^\circ)$, so ergibt sich:

$$\eta(\psi^\circ, \psi^\circ) = (e^\circ)^2;$$

für $\varphi = \psi^\circ$ nimmt η diesen Wert $(e^\circ)^2$ an; also ist das Minimum aller $\eta(\varphi, \varphi) = \eta^\circ = (e^\circ)^2$.

Wie man sich leicht überzeugt, ist im allgemeinen jede Eigenfunktion von (1) auch Eigenfunktion von (7).

Unser Verfahren besteht nun darin, dass wir das Ritzsche Näherungsverfahren nicht, wie üblich, auf $\delta e(f, f) = 0$, sondern auf das andere $\delta \eta(f, f) = 0$ anwenden. Die Näherungswerte η_N konvergieren, wie immer nach Ritz, mit wachsendem N von oben gegen η°, ihre Wurzeln also — gegen e°.

Aber auch die zugehörigen Näherungsfunktionen ψ_N konvergieren gegen die Eigenfunktion ψ°.

Im «Fehlerintegral» (1):

$$\int \frac{1}{\chi} [H(\psi_N) - E_N \cdot \chi \psi_N]^2\, d\tau = \int \frac{1}{\chi} [h(\psi_N) - e(\psi_N, \psi_N) \chi \psi_N]^2\, d\tau =$$
$$= \{\eta(\psi_N, \psi_N) - [e(\psi_N, \psi_N)]^2\} \cdot \int \psi^2{}_N \cdot \chi\, d\tau,$$

können wir $\int \psi^2_N \cdot \chi \, d\tau = 1$ normieren; Faktor $\{\ \}$ ist nach (8) stets $\geqslant 0$; andererseits ist er stets kleiner als $\eta(\psi_N, \psi_N) - (e^\circ)^2$, da $e(\psi_N, \psi_N) > e^\circ > 0$ ist.

Mit wachsendem N konvergiert $\eta(\psi_N, \psi_N)$ gegen $(e^\circ)^2$, also wird für hinreichend grosse N das Fehlerintegral beliebig klein; unsere ψ_N genügen immer besser der vorgegebenen Differentialgleichung, und zwar mit immer besseren Näherungswerten $E(\psi_N, \psi_N)$. Da der Grundzustand nicht entartet ist, konvergieren die ψ_N gegen die Eigenfunktion ψ°.

Zusammenfassung

Für ein Eigenwertproblem $H(\psi) - E \cdot \chi\psi = 0$ mit selbstadjungiertem Operator H, dessen Eigenwerte E^n alle oberhalb einer Schranke $-S$ liegen, $E^n \geqslant E^\circ > -S$, löse man nach dem Ritzschen Verfahren das Variationsproblem:

$$\delta \int \frac{1}{\chi} [H(\psi_N) + S \cdot \chi \cdot \psi_n]^2 \, d\tau - \eta_N \cdot \delta \int \chi \cdot \psi^2_N \, d\tau = 0.$$

Dann konvergiert η_N, die kleinste der N Wurzeln der auftretenden Determinate, mit wachsendem N von oben gegen $(E^\circ + S)^2$, und das zugehörige ψ_n gegen die Eigenfunktion ψ° des gegebenen Eigenwertproblems $H(\psi) - E \cdot \chi\psi = 0$.

Physikalisch-technisches Institut
Dnepropetrowsk

Eingegangen
d. 20. VI. 1936

ZITIERTE LITERATUR

[1] J. H. Bartlett, J. J. Gibbons u. C. C. Dunn, Phys. Rev., 47, 679 (1935).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XIV, № 2

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

LA SOLUTION DES PROBLÈMES AUX LIMITES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DANS LE CAS D'UN CERCLE ET D'UNE SPHÈRE

Par V. I. SMIRNOV (SMIRNOFF), Membre correspondant de l'Académie

Dans la note précédente [1] nous avons donné la solution du problème aux limites pour l'équation des ondes dans le cas d'un cercle et d'une sphère. Dans cette note nous allons considérer les problèmes analogues de la théorie de l'élasticité.

En prenant d'abord le cas plan, considérons les vibrations de la partie du plan en dehors de la circonférence $r = 1$, si les valeurs initiales pour $t = 0$ sont nulles et nous avons des déplacements donnés sur la circonférence $r = 1$. Les composantes du déplacement suivant les axes polaires (r, θ) s'expriment par les formules:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{1}$$

où φ et ψ doivent satisfaire aux équations:

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi, \quad b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta\psi, \tag{2}$$

et $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ sont les vitesses de la propagation des ondes longitudinales et transversales. Supposons que les conditions aux limites ont la forme:

$$u_r\Big|_{r=1} = u_m(t)\, e^{im\theta}, \quad u_\theta\Big|_{r=1} = v_m(t)\, e^{im\theta}. \tag{3}$$

Prenons les solutions des équations (2):

$$\varphi_m = \int_0^{t-ar+a} \Phi_m(\tau) \sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2 r^2} - 1}\, U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right) d\tau \times e^{im\theta},$$

$$\psi_m = \int_0^{t-br+b} \psi_m(\tau) \sqrt{\frac{(t-\tau+b)^2}{b^2 r^2} - 1}\, U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+b}{br}\right) d\tau \times e^{im\theta},$$

où

$$U_m(x) = \frac{1}{(m+1)^2} T'_{m+1}(x); \quad T_m(x) = \cos(m \arccos x).$$

Pour les fonctions inconnues complexes $\Phi_m(\tau)$ et $\psi_m(\tau)$ nous avons en vertu des conditions aux limites le système des équations intégrales:

$$\left.\begin{aligned} &-\int_0^t \Phi_m(\tau)\,\frac{(t-\tau+a)T_m\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)}{\sqrt{(t-\tau+a)^2-a^2}}\,d\tau + \\ &+ im\int_0^t \psi_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau+b)^2}{b^2}-1}\;U_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau = u_m(t), \\ &im\int_0^t \Phi_m(\tau)\sqrt{\frac{(t-\tau+a)^2}{a^2}-1}\;U_{m-1}\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)d\tau + \\ &+\int_0^t \psi_m(\tau)\,\frac{(t-\tau+b)T_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)}{\sqrt{(t-\tau+b)^2-b^2}}\,d\tau = v_m(t). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Nous allons considérer maintenant le cas de l'espace en nous bornant au cas de la symétrie axiale. Soit $(u_r, u_\vartheta, u_\theta)$ les composantes du déplacement suivant les axes sphériques (r, ϑ, θ) et supposons en premier lieu que $u_\theta = 0$. Dans ce cas, en tenant compte des formules de la théorie de l'élasticité, il est facile de prouver, que

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\,\psi,\quad u_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\psi,$$

où φ et ψ ne dépendent pas de θ et doivent satisfaire aux équations:

$$a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi; \quad (5)$$

$$b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Delta\psi - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\,\psi. \quad (6)$$

Supposons que les conditions aux limites ont la forme

$$u_r\Big|_{r=1} = u_m(t)\,P_m(\cos\vartheta),\quad u_\vartheta\Big|_{r=1} = v_m(t)\sin\vartheta\,P'_m(\cos\vartheta),$$

où $P_m(x)$ sont les polynômes de Legendre. Pour l'équation (5) nous prenons les solutions sous la forme [1]:

$$\varphi_m = \int_0^{t-ar+a} \Phi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+a}{ar}\right)d\tau \times P_m(\cos\vartheta), \quad (7)$$

où

$$Q_{m+1}(x) = \int_1^x P_m(x)\,dx.$$

Pour l'équation (6) les solutions fondamentales ont la forme:

$$Q_{m+1}\left(\frac{t}{br}\right)\sin\vartheta\,P'_m(\cos\vartheta),$$

et nous posons

$$\psi_m = \int_{\frac{t-br+b}{a}}^{t} \psi_m(\tau)\, Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{br}\right) d\tau \times \sin\vartheta\, P'_m(\cos\vartheta). \tag{8}$$

En faisant la substitution dans les conditions aux limites, nous aurons le système des équations intégrales pour les fonctions $\Phi_m(\tau)$ et $\Psi_m(\tau)$:

$$\left.\begin{aligned} &-\int_0^t \Phi_m(\tau)\,\frac{t-\tau+a}{a}\,P_m\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)d\tau + \\ &+ m(m+1)\int_0^t \Psi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau = u_m(t), \\ &-\int_0^t \Phi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+a}{a}\right)d\tau + \\ &+\int_0^t \Psi_m(\tau)\left[\frac{t-\tau+b}{b}\,P_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right) - Q_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)\right]d\tau = \varphi_m(t). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

La fonction ψ précédemment indiquée est la composante du potentiel vectoriel suivant l'axe θ.

Considérons maintenant le cas, où $u_\vartheta = u_r = 0$ et prenons les conditions aux limites sous la forme:

$$u_\vartheta\Big|_{r=1} = w_m(t)\sin\vartheta\, P_m(\cos\vartheta).$$

Dans ce cas introduisons les composantes du potentiel vectoriel suivant les axes ρ et z des coordonnées cylindriques $(\rho, z, 0)$ et posons $\varphi = \psi_z$ et $\psi = \psi_\rho$. La fonction φ doit satisfaire à l'équation (5), où l'on remplace a par b, et la fonction ψ doit satisfaire à l'équation (6). Nous avons pour u_ϑ la formule:

$$u_\vartheta = \sin\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \cos\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}.$$

Prenons la fonction φ sous la forme (7), où l'on doit seulement remplacer a par b, et la fonction ψ sous la forme (8). Nous aurons pour les fonctions $\Phi_m(\tau)$ et $\Psi_m(\tau)$ le système suivant des équations intégrales:

$$\left.\begin{aligned} &-\int_0^t \Phi_m(\tau)\,\frac{t-\tau+b}{b}\,P_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau - \\ &- m(m+1)\int_0^t \Psi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau = w_m(t), \\ &-\int_0^t \Phi_m(\tau)\,Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)d\tau + \\ &+\int_0^t \Psi_m(\tau)\left[Q_{m+1}\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right) - \frac{t-\tau+b}{b}\,P_m\left(\frac{t-\tau+b}{b}\right)\right]d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

En appliquant les méthodes usuelles, on peut résoudre les systèmes (4), (9) et (10) sous forme finie, ce que nous avons fait explicitement pour une seule équation intégrale dans la note précédente (1).

On peut appliquer la même méthode pour les problèmes intérieures, comme nous l'avons déjà fait pour une seule équation (1), mais dans le cas présent au lieu de la formule de Poisson nous devons prendre la formule connue de Stokes.

Institut des Mathématiques et de Mécanique.
Université des Leningrad.

Manuscrit reçu
le 28. IX. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

(1) V. Smirnov, C. R. Acad. Sci. URSS, I, № 1 (1937).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XIV, № 2

PHYSIK

ZUR «KONZENTRATIONSAUSLÖSCHUNG» DER FLUORESZENZ VON FARBSTOFFLÖSUNGEN

Von F. DUŠINSKIJ (DUSCHINSKY)

(Vorgelegt von S. I. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 3. XI. 1936)

§ 1. Die wesentlichen Eigentümlichkeiten der Konzentrationsauslöschung seien als bekannt vorausgesetzt. Sie bestehen, kurz zusammengefasst, in folgendem:

1) Verlauf der Ausbeute als Funktion der Konzentration in einem weiten Bereich exponentiell ([1], [2]).

2) Existenz eines Schwellenwertes der Konzentration, unterhalb dessen keine Auslöschung zu beobachten ist ([2]).

3) Grösse der Auslöschung abhängig vom Lösungsmittel ([2], [3], [4]).

4) Auslöschung auch in festen Lösungen ([5],[6]).

5) Auch dort Gültigkeit der folgenden Beziehung:

$$\frac{L_0}{L} \approx \frac{\tau_0}{\tau} \text{ *} \quad ([7]).$$

6) Temperatursteigerung bewirkt bei kleinen Konzentrationen in den meisten Fällen Verringerung der Auslöschung ([6],[4]).

7) Mit der Auslöschung parallelgehende Veränderung des Absorptionsspektrums; Erscheinen einer inaktiven Absorptionsbande ([4]).

Eine Theorie der Konzentrationsauslöschung muss alle diese Punkte berücksichtigen. Die Konfigurationstheorien ([1], [5]) erklären, wenigstens im Prinzip, alle Punkte bis auf 2) und 5). Dasselbe leistet die Polymerisationshypothese**. Beiden Betrachtungsweisen ist jedoch die Annahme gemeinsam, dass eng beieinanderliegende Molekülpaare bzw., von dem anderen Standpunkt, assoziierte Gruppen, an der Absorption, nicht aber an der Emission teilnehmen. Aus dieser Annahme folgt aber entgegen Punkt 5) Unabhängigkeit der Lebensdauer. P. Pringsheim wies darauf hin, dass eine Lebensdauerabhängigkeit in der Konfigurationstheorie dann zustande käme, wenn man den Begriff der scharf begrenzten Wirkungssphäre fallen liesse und statt dessen für jeden Abstand r eines angeregten von einem unangeregten

* Erklärung der Bezeichnungen vor Gleichung (1).

** B. J. Svešnikov [ЖФХ, 5, 38 (1934)] hat gezeigt, dass sich bei Berücksichtigung der mehrfachen Polymerisation der Schwellenwert aus deren Verlauf erklären lässt.

Molekül eine gewisse Wahrscheinlichkeit $f(r)dt$ einer Desaktivation in der Zeit dt annähme. Führt man die Rechnung unter Berücksichtigung der Konzentrationsschwankungen aber wirklich durch, so kommt man zu dem überraschenden Ergebnis, dass man nur dann den vom Experiment geforderten exponentiellen Verlauf der Auslöschung erhält, wenn man $f(r)$ so wählt, dass es unterhalb eines bestimmten r gleich Eins, oberhalb gleich Null ist. Dies ist aber wieder nichts anderes als Einführung eines Wirkungsradius. Für diese spezielle Form von $f(r)$ verschwindet aber wieder die Lebensdauerabhängigkeit. Würde man sich mit einer Annäherung des Verlaufs der Auslöschung an eine Exponentialfunktion zufriedengeben, so würde man eine geringe, aber nicht ausreichende, Lebensdauerabhängigkeit erhalten.

§ 2. F. Perrin [8] hat darauf hingewiesen, dass bei Anwesenheit assoziierter Komplexe die Übertragung der Anregungsenergie durch wellenmechanische Resonanz (induction quantique) einen sehr bedeutenden Beitrag zur Auslöschung liefern könnte. Der Mechanismus der Erscheinung ist dabei der, dass die Energie eines angeregten Moleküls auf ein assoziiertes Paar übertragen wird und dort nicht mehr zur Ausstrahlung gelangt, sondern als kinetische Energie dem Lösungsmittel mitgeteilt wird [«Auslöschung erster Art» nach einer von S. I. Wawilow [9] kürzlich eingeführten Terminologie]. Die Annahme, dass assoziierte Moleküle am Energieaustausch teilnehmen erscheint gerechtfertigt durch die nur geringe Verschiebung ihres Absorptionsspektrums, ferner—wie hier nicht näher ausgeführt werden kann—durch die die Resonanzschärfe verwischende Anwesenheit des Lösungsmittels. Zweck der vorliegenden Mitteilung ist es, zu zeigen, dass eine Konfigurations bzw. Polymerisationstheorie, durch die Perrinsche Annahme ergänzt, tatsächlich imstande ist, wenigstens prinzipiell allen oben angeführten Punkten, insbesondere also auch 2) und 5) zu genügen.

Wir beschränken uns auf den Fall der festen Lösung. Nach F. Perrin [10] besteht für ein angeregtes Molekül eine gewisse, zeitlich konstante Wahrscheinlichkeit ϱdt, seine Anregungsenergie in der kurzen Zeit dt durch Resonanz an ein anderes, gleichartiges Molekül zu übertragen. Wir wollen, obgleich dies sicher eine sehr rohe Annäherung an die Wirklichkeit bedeutet, annehmen, dass die gleiche Wahrscheinlichkeit ϱdt für die Energieübertragung von einem angeregten Molekül auf ein assoziiertes Paar besteht (Grössere Komplexe als Paare seien vernachlässigt.). Ist p die Wahrscheinlichkeit, unter den Farbstoffmolekülen ein assoziiertes Paar anzutreffen, so hat demnach ein angeregtes Molekül die Wahrscheinlichket $p\varrho dt$, in der Zeit dt seine Anregungsenergie an ein assoziiertes Paar abzugeben, d. h. «ausgelöscht» zu werden. Die weitere Rechnung verläuft ganz analog der in der Stosstheorie von Frank und Wawilow [11]. Nur tritt hier $p\varrho dt$ an die Stelle der dortigen Auslöschungswahrscheinlichkeit durch Stoss, p hat ganz dieselbe Bedeutung, wie dort der Ausdruck $1-e^{-\omega Nc}$, der dort die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass ein löschendes Molekül zufällig in eine gewisse Mindestentfernung zu einem angeregten zu liegen kommt. Wir finden also, wenn wir mit L, L_0, τ, τ_0 respektive Ausbeute und Lebensdauer bei vorhandener, bzw. fehlender Auslöschung bezeichnen die Beziehungen:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + \varrho p; \qquad (1)$$

$$\frac{L_0}{L} = \frac{1+\tau_0 \varrho p}{1-p}; \qquad (2)$$

$$\frac{L_0}{L}(1-p) = \frac{\tau_0}{\tau}. \qquad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit, assoziierte Molekülpaare anzutreffen, ist in dem allein interessierenden Konzentrationsbereich stets klein gegen eins, wodurch dem Punkt 5) Genüge geleistet wird. Durch unabhängig voneinander ausgeführte, sehr genaue, parallelgehende Messungen von Lebensdauer und Ausbeute hätte man eine Möglichkeit, den Verlauf des Assoziationsgrades in Funktion der Konzentration direkt zu bestimmen. Mit $p \ll 1$ wird

$$\frac{L_0}{L} \approx 1 + p(1 + \tau_0 \varrho) \approx 1 + p\tau_0\varrho, \tag{4}$$

denn, wie man sich leicht überlegt, muss $\tau_0\varrho$ gross gegen eins werden.

Je nachdem, ob man nun die Assoziationswahrscheinlichkeit p nach einer rein statistischen Konfigurationshypothese oder unter Annahme echter Polymerisation bestimmt, erhält man verschiedene Abhängigkeit von der Konzentration. Im ersten Fall nimmt $1-p$ bei Konzentrationserhöhung exponentiell ab, im zweiten gilt eine kompliziertere Beziehung (Gleichgewicht einer bimolekularen Reaktion). Für kleine Konzentrationen geben jedoch beide Annahmen dasselbe, nämlich

$$p = \omega k,$$

(k—Anzahl der Farbmoleküle pro 1 cm³).

Nach Perrin fällt ϱ mit der 6. Potenz des Abstandes. Es gilt also näherungsweise

$$\varrho = \lambda k^2$$

(näherungsweise deshalb, weil man die Anwesenheit vieler s t a t i s t i s c h v e r t e i l t e r Moleküle zu berücksichtigen hätte). Für die Lumineszenzausbeute ergibt sich nach Gleichung (2) der nur einparametrige Ausdruck:

$$\frac{L_0}{L} \approx 1 + PC^3 \tag{5}$$

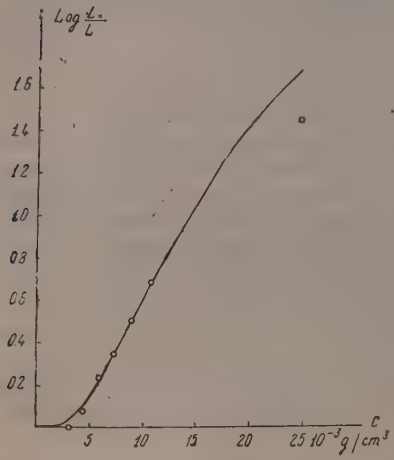
mit

$$P = \omega^3 \tau_0 \left(\frac{N}{M}\right)^3. \tag{6}$$

Hierbei bezeichnet C die Konzentration in g/cm³, N—die Loschmidtsche Zalh: $6 \cdot 10^{23}\,g^{-1}$, M das Molekulargewicht des Farbstoffes.

§ 3. Die Funktion $1+PC^3$ gibt, obwohl sie von einer Exponentialfunktion sehr verschieden ist, die Messergebnisse in recht guter Weise wieder. Ihr Logarithmus verläuft in einem weiten Bereich praktisch linear und zeigt bei kleinen Konzentrationen etwas wie einen Schwellenwert, d. h. einen sehr langsamen Anstieg und bei einer gewissen Konzentration erst Übergang in das geradlinige Stück. Da nur ein Parameter vorhanden ist, ist die Funktion hingegen nicht imstande, Schwellenwert und Steilheit u n a b h ä n g i g wiederzugeben. In Anbetracht des zur Frage des Schwellenwertes sicher noch nicht ausreichenden experimentellen Materials scheint es verfrüht, die Notwendigkeit der Einführung eines zweiten Parameters zu diskutieren. [Man kann nicht etwa—wie es auf den ersten Blick den Anschein haben könnte—aus den Wawilowschen Kurven(²) ($\log \frac{L_0}{L}$ als Funktion von C) durch Extrapolation den Schwellenwert bestimmen, denn in die Wahl des L_0 geht schon die Kenntnis des Schwellenwertes ein. Würde L_0 zu klein gewählt, so erhielte man einen scheinbar zu grossen Schwellenwert.

Die Existenz der Schwelle überhaupt aber nur messtechnischen Gründen zuzuschreiben ([13]), scheint hingegen—auch nach neuerem Versuchsmaterial—nicht anzugehen. Die Figur zeigt den Verlauf von $\log(1+PC^3)$ als Funktion von C mit $P=3.05\cdot10^6$. Die eingezeichneten Punkte sind der zitierten Wawilowschen Arbeit([2]) entnommene Werte für Fluoreszein in Isobutylalkohol. Die Messungen für die anderen Lösungsmittel lassen sich ebenso gut nur dann wiedergeben, wenn man den Schwellenwert ändert. Die theoretische Kurve zeigt auch den experimentell stets beobachteten Abfall bei grossen Konzentrationen. Die nicht völlige Übereinstimmung mit den Messwerten bei den kleinsten Konzentrationen einerseits, den grössten anderseits spricht aus vielerlei Gründen nicht gegen die entwickelten Anschauungen.



Aus P lässt sich bei Kenntnis von ω die Grösse $\frac{1}{\sqrt{\lambda\tau_0}}$ bestimmen, die ein Mass für die Häufigkeit der Energieübertragung durch Resonanz darstellt. Sie gibt die Konzentration an, bei der die Polarisation der Fluoreszenz infolge der Energieübertragungen annähernd auf die Hälfte herabgesunken ist. Setzen wir $\omega=10^{-21}$ cm^3, was in der Sprache der Konfigurationstheorie wirksamer Assoziation bei einem Mindestabstand von ungefähr 1 Å entspricht, so folgt $\frac{M}{N}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda\tau_0}}=8\cdot10^{-4}$ g/cm^3, ein Wert von der aus dem Experiment bekannten Grössenordnung.

Laboratorium für Photochemie.
Staatliches Optisches Institut.
Leningrad.

Eingegangen
d. 3. XII. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

Einige der folgenden Arbeiten sind nur beispielshalber zitiert; es hätten an ihrer Stelle auch andere genannt werden können.

[1] F. Perrin, C. R., **178**, 1978 (1924). [2] S. I. Wawilow, ZS. f. Phys., **31**, 750 (1925). [3] J. Bouchard, Journ. de Chimie Physique, **33**, 127 (1936). [4] W. L. Lewschin, Acta Physicochimica URSS, **1**, 685 (1936). [5] E. Merritt, Journ. Opt. Soc. Amer., **12**, 613 (1926). [6] W. L. Lewschin, ZS. f. Phys., **43**, 230 (1927). [7] W. Szymanowski, ZS. f. Phys., **95**, 460 (1935). [8] F. Perrin, C. R., **192**, 1727 (1931). [9] S. I. Wawilow, C. R. Acad. Sci. URSS, III, 271 (1936). [10] F. Perrin, Ann. de Phys., **17**, 284 (1932). [11] J. M. Frank u. S. I. Wawilow, ZS. f. Phys. 69, 100 (1931). [12] S. J. Wawilow, ZS. f. Phys., **31**, 756, Fig. 1 (1925). [13] J. Bouchard, Journ. de Chimie physique, **33**, 60 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XIV, № 2

GEOPHYSICS

THE SPECTRUM OF THE TWILIGHT SKY

By V. ČERNIAJEV and M. VUKS

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, I. XII. 1936)

During the observations of the spectra of northern lights in the atmosphere, the upper layers of which were still under the influence of direct sun beams, Vegard and Tonsberg (1) found a well marked enhancement of the red oxygen line (λ 6300° Å) as well as enhancement of the first positive group of nitrogen as compared with the intensity of the lines of the spectra of northern lights in the night time. It is well known that the spectrum of Polar light is very like that of the night sky (2), most lines of either being the same and probably of the same nature. Thus, it was of interest to investigate, whether the lines of the night sky are also enhanced during twilight, or not. Observations of this kind must result in a better understanding of the important question of the nature of sky luminescence.

During the Expedition of the Academy of Sciences of the USSR to mount Elbrus, Caucasus, in the summer of 1936, we tried to obtain the spectra of the twilight sky with the help of two powerful glass spectrographs built at the Optical Institute of Leningrad. The spectrograph № 1, having a relative aperture 1 : 0.58, gives the length of the visible spectrum from 4000 to 6500 Å equal to 3.1 mm. The spectrograph № 2, with a relative aperture of 1 : 1, gives the length of the same interval equal to 2.8 mm. We used Ilford Hypersensitiv Panchromatic Plates and the glycin developer, the time of development being equal to 1.5 h. and the temperature, to 16° C. The observations have been made at «Krugozor» (Elbrus) at a height of 3000 m above sea level.

Using the spectrograph № 1 we obtained patterns of the spectrum of the sky during the evening twilight on the 9th of August. The spectrograph was directed, at an angle of 30° with respect to the horizon, towards the north. We got 5 patterns during the astronomical twilight (from 7.50 p. m. to 8.50 p. m.), the exposures varying from 2 to 20 min. The first pattern had been strongly overexposed; on the second one could see an emission line in the yellow region of the spectrum as well as a continuous sun spectrum with Frauenhofer lines visible throughout the pattern. The yellow line is very intense on the third pattern (8.04 p. m. to 8.10 p. m.); it is also seen on the fourth (8.15 p. m. to 8.25 p. m.), as well as the continuous spectrum, though both are much weaker here than on the third pattern. On the fifth pattern

taken from 8.30 to 8.50 p. m., practically in the night time, nothing but the comparison spectrum superimposed on each plate could be seen.

With the spectrograph № 2 exposures were made only during the morning twilight. We could not make use of the spectrograph № 1 which was more powerful and had a slightly greater dispersion. We were not able to repeat our observations in the evening, because the fog was nearly constantly present in the evening, although it sometimes disappeared towards the beginning of the night.

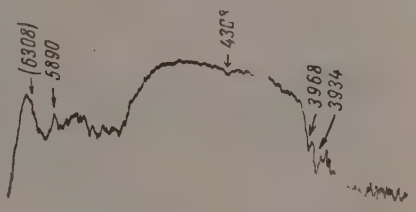
We obtained the spectra of the morning twilight on the 17th August (towards the zenith) on the 20th (towards the north and at an angle of 60° with respect to the horizon), on the 21st, 22nd and 23rd (towards the zenith). During the astronomical twilight (the sun being between 18 and 7° below the horizon) four exposures were made, as a rule: 1) 40 min., 2) 10 min., 3) 4 min., 4) 2 min. All the patterns without exception show the yellow line we found in the evening twilight. In addition to this the patterns of the 20th August also show a weak line in the green region. Traces of this line could also be noticed on the patterns taken on other days. After measuring the patterns with a comparator we found that the wave length of the yellow line observed would fit in, within the probable limits of precision of observations, with the wave length (5890 Å) of an intense emission band of the night sky. The latter is supposed to be an emission band of the water molecule, as the possibility of the presence of water vapour at great heights is not excluded (3). The above mentioned identification is, however, not a complete one. The wave length of the green line present on the patterns from the 20th August was found to be equal to 5610 Å. The possibility that this line actually is the green line of the night sky (λ 5577 Å) is not excluded, because the pattern where the line's intensity was great enough to make the measurements possible has not been provided with a spectrum of comparison. On another hand the Frauenhofer lines on the long-wave side were not visible owing to the fact that dispersion is but slight in that region. So we had to measure the distance between that line and each of the Frauenhofer lines of the short-wave side, and, as the dispersion was known, to calculate its wave length. Near 5600 Å the spectrograph has a dispersion as low as 1400 Å/mm, so that the probable error could well reach here 35 Å. In spite of that, the line may also be different from the green line of the night sky and can be emitted only under the direct influence of sun beams. It is of interest to notice here that this line is fairly visible in the patterns taken with the spectrograph directed at an angle of 60° with respect to the horizon, and is barely visible when the spectrograph is directed towards the zenith. This at any rate gives an indication of its atmospheric origin.

The yellow line is the most intense on the patterns taken during the second and the third exposures, i. e., towards the end of the morning twilight. In the very end of twilight (the fourth exposure) its intensity became evidently smaller with respect to that of the continuous background, which surrounds it. But the variation of intensity seems to be less abrupt here than in the course of morning twilight.

On the figure is shown a microphotogram of the spectrum taken on the 22nd August during nearly the whole of the astronomical twilight of the morning. On the continuous background one can see a sharp maximum at 5890° Å and Frauenhofer lines G (λ 4308 Å), H (λ 3968 Å) and K (λ 3934° Å). As the dispersion in the red region was very small (near 2100 Å/mm at λ 6300 Å) and as the slit of the spectrograph was not narrow enough, the intensity of the continuous background in this region is very high. It is

therefore very difficult to say whether the red line of the night sky (λ 6300 Å) is present on the spectrograms or not.

We also took spectra of the night sky with the same spectrographs, plates and manner of development and obtained, with exposures of the order of 5—6 h., the yellow line 5890 Å nearly so intense as our yellow line of twilight taken during exposures lasting a few minutes. If both lines are identical, it is evident that the band λ 5890 Å of the night sky becomes much more intense in the twilight than it is in the night time. It is not possible to explain such an enhancement by a lowering of the threshold of the sensitivity of the emulsion under the influence of the continuous background of scattered light («Vorbeleuchtung»), for the effect of such a kind can scarcely give more than twice the relative blackening of the plate.



The spectrum of the day sky taken on the same plates, through a very dense neutral filter, the plates being developed under similar conditions, does not give any line either in the yellow region or in the green one.

The possibility that the line 5890 Å of the night sky is different from the yellow line we obtained in twilight is not excluded of course owing to the fact that the dispersion of the spectrographs was too small to make the measurements of the wave lengths exact. In such a case this twilight line can be excited only under the direct influence of sun beams. It should be noted that even if these lines are identical, the mechanism of emission in the night time should be different from that in the twilight.

If the green line of oxygen λ 5577 Å is enhanced in the twilight, it is clear from the term scheme (4) that the red line λ 6300° Å should be enhanced as well, because the emission of λ 5577 Å leads to an increase of population of the state $^1D_2$—the initial state of λ 6300 Å. Whether the latter is present in the spectrograms or not is difficult to decide, as mentioned above, but it should be noted that in the place of λ 6300 Å on all the microphotograms (marked on the figure) a trace of asymmetry is to be seen. If this line is enhanced at twilight, this does not by any means result in the enhancement of λ 5577 Å, as 6300 Å has as its initial level, the final level of λ 5577 Å, and not the reverse.

After returning from the Elbrus, we found in literature (5) some references to the enhancement of the red line of the night sky λ 6300 A during twilight. The authors mentioned did not find any marked change in the intensity of the yellow and the green lines. On the other hand, Eropkin and Kozyrev told us privately that they also had observed on the Pamir in 1935 an enhancement of the red line. The discrepancy can prehaps be explained by the difference of locality and time of observation. It is known that the spectra of the night sky taken in different places and at different times of the year sometimes differ essentially one from another (6), especially, as regards the intensities of the lines.

We take this opportunity of conveying our profound gratitude to Professor S. I. Wawilow, Member of the Academy of the USSR for the interest he has taken in our work, and his most valuable advice.

State Optical Institute.
Leningrad.

Received
1. XII. 1936.

REFERENCES

[1] L. Vegada. E. Tonsberg, Nature, **137**, 779 (1936). [2] L. A. Sommer, ZS. f. Phys., **77**, 374 (1932); **80**, 273 (1933); J. Dufay, C. R., **198**, 107 (1934), Journ. de Phys. (7) **4**, 221 (1933); J. Cabannes, C. R., **198**, 2132 (1934). [3] L. A. Sommer, ZS. f. Phys., **77**, 374 (1932). [4] L. A. Sommer, loc. cit. [5] H. Garrigues, C. R., **202**, 1807 (1936); J. Cabannes et H. Garrigues, C. R., **203**, 484 (1936). [6] G. Dejardin, Rev. mod. Phys., **8**, N. 1, 1 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XIV, № 2

GÉOLOGIE

LA DÉCOUVERTE DE LA FAUNE PALÉOCÈNE EN TADJIKISTAN

Par B. A. PETRUŠEVSKIJ

(Présenté par A. D. Archangelsky, de l'Académie, le 7. V. 1936)

La question de la limite du crétacé supérieur et du paléogène du Turkestan n'est pas élucidée jusqu'à présent. A. D. Archangelsky (1) qui a séparé du crétacé supérieur l'horizon de Susak a été embarrassé de déterminer son âge précis, ayant indiqué que la faune ramassée démontre à la fois les caractères des formes crétacées et tertiaires. Plus tard N. F. Bézobrazova (3) est arrivée à la conclusion que l'horizon de Susak a l'âge de l'éocène inférieur comme réposant en Fergan sur les couches à *Corbula biangulata* Desh. de l'âge paléocène (*Sphenia rostrata* Rom. G. Romanovsky). A. V. Peive (10), a soumis à une critique sévère la détermination de N. F. Bézobrazova concernant l'âge des couches aux *Corbulidae* et les a designées, par erreur, comme appartenant à l'éocène inférieur, et les couches à *Ostrea hemiglobosa* à l'étage danois supposé.

On n'a pas trouvé de *Corbulidae* en Tadjikistan et au sud-ouest de l'Usbékistan et la limite entre le crétacé supérieur et le paléogène était tracée par différents auteurs d'une manière différente sans preuves suffisantes. On tenait le plus souvent pour la limite le toit de calcaires blancs dolomitisés, parfois gypseux, atteignant l'épaisseur de 60—80 *m*, rarement de 100 *m*, et couronnant les coupes de la craie supérieure. La plupart des explorateurs—S. N. Michailovskij (9), M. S. Swezow (15), N. P. Cheraskov (12), N. A. Koudriavcew (8), B. M. Zdorik (6, 7)—les ont considérés comme appartenant à l'étage danois ou au sénonien, quelques-uns—A. D. Archangelsky (2),—aux couches de transition entre le crétacé et le paléogène. P. K. Čichačev, qui les tenait auparavant pour des couches crétacées (13) tend dans son récent travail à désigner leur partie supérieure comme appartenant au paléogène (14). D'ordinaire, on ne trouvait pas de faune définissable dans ces calcaires.

Ce n'est que dans ces dernières années qu'une faune riche, présentée principalement par différentes *Corbulidae*, de même que par quelques autres (*Modiola*, *Cardita*) a été ramassée dans les calcaires des environs de Kerminé et de Boukhara par G. I. Šatov et E. S. Rybnikova (4) et dans la région Shirabad-Baïssune et au sud-ouest du Tadjikistan par N. P. Touajev et N. A. Schvemberger (11). O. S. Vialov (5) ayant examiné cette faune—les collections de N. L. Boubličenko du Kara-Taou, de V. V. Alexandrov du Turkmenistan oriental et les trouvailles anciennes de F. N. Černyšev, M. Bronnikov, V. N. Weber,

A. V. Faas et G. D. Romanovsky de la Ferghana,—donne la liste de 21 formes. A l'exception de *Corbula angulata* Lam., *C. angulata* Lam. var. *vasseuri* Cossm., *C. biangulata* Desh., *C. turkestanensis* Slodk., *Modiola jeremejew* Rom. et *Cardita minutula* Rom, tous les autres sont des formes nouvelles. O. S. Vialov démontre qu'il n'y en a que 4 formes (*C. angulata*, *C. angulata* Lam. var. *vasseuri*, *C. biangulata* et *C. gorizdroae* Vial.) propres au paléogène de l'Europe occidentale; c'est pour cela que ces calcaires en dépit de leur appartenance évidente à l'éocène inférieur (y compris le paléocène) et non pas au crétacé supérieur, ne peuvent être comparés au paléogène d'autres pays. Il propose de leur donner le nom de l'horizon de Boukhara. N. P. Touajev et N. A. Šwemberger ([11]) ont rapporté au paléocène tous les calcaires contenant *Corbula biangulata* Desh. et *Modiola jeremejewi* Rom.

En été 1934 je fus envoyé par l'Institut Scientifique des Engrais minéraux de compagnie avec les collaboratuers de l'Institut N. S. Zaicev et S. M. Andronov à la recherche de phosphorites sur le versant méridional de la chaîne du Guissar. Les recherches se sont développées dans la zone de Jangi-Basar à l'est jusqu' à la dépression de Baïssune à l'ouest. Dans plusieurs endroits de cette zone nous avons trouvé une faune asséz riche dans les couches superposant directement les calcaires ci-dessus décrits et exprimées par des marnes grises, compactes, parfois siliceuses; les marnes passent en bas insensiblement aux calcaires, ce qui fait difficile d'indiquer la limite entre eux, tandis qu'en haut—graduellement, mais assez vite,—en des argiles grises contenant partout en abondance *Ostrea camulus* Burač, *Ostrea hemiglobosa* (plus rares) et d'autres grosses huîtres du groupe *Cigantica* (horizon de Susak). La faune est concentrée dans les marnes supérieures horizontales (leur épaisseur commune atteint jusqu'à 10—12 m), tandis que les marnes intérieures sont généralement muettes; ce sont d'ordinaire les noyaux marneux de pélécipodes mal conservés et plus rarement de gastropodes, de même que de très nombreuses coquilles phosphoritisées de *Cryphaea Escheri*. Dans les couches superposant les marnes, c'est-à-dire dans les argilles à *Ostrea hemiglobosa*, cette faune n'est constatée nulle part.

Sur le versant septentrional de la chaîne du Guissar, dans la région Jakkabag, A. V. Peivé a trouvé dans les mêmes marnes la forme tout-à-fait indentique; dans les calcaires d'en bas il a trouvé des *Corbulidae* mal conservées.

Nos trouvailles, de même que les collections de A. V. Peivé, ont été étudiées, par S. M. Andronov et puis complaisamment examinées par A. D. Archangelsky. Étant mal conservées, la plupart des formes ne permet pas la détermination et en attendant on peut parler seulement de formes suivantes: *Gryphaea Escheri* var. *antiqua* Schwetz., *Turritella kamyschinensis* Netsch., *Pholadomya cuneata* Sow., *Protocardium* cf. *semidecussatum*. Koen., *Cyprina* sp. (cf. *morrissi* Sok). Parmi les formes indéterminables sont à signaler encore *Protocardium* sp. ind., *Pholadomya* sp. ind., *Ostrea* sp. ind.

Gr. Escheri n'est pas un fossile caractéristique; appartenant au groupe *O. vesicularis*, elle est pratiquement souvent presque indiscernable de celle-ci, de même que de *O. Archiaci*, *O. Brogniarti* et d'autres, elle reçoit pafrois son nom d'espèce d'après sa position stratigraphique. Nos exemplaires sont tout-à-fait identiques à ceux du paléocène décrits et dessinés par M. S. Švecov ([16]) des environs de Soukhoumi (Soukhoum-Kalé). Il paraît que ce sont les huîtres auxquelles N. A. Kudriavcev ([8]) donne le nom de *Gr. vesicularis*, tandis que P. K. Čichačev et A. P. Buračeк ([4]) les désignent sous le nom de *Pycnodonta Archiaci*.

Les autres formes caractérisent les couches de Syzran et de Saratov, dans la région du Volga, sans se lever aux horizons plus hauts du paléogène. D'après

A. D. Archangelsky, cette faune (y compris les exemplaires dont l'espèce ne peut être déterminée) semble incontestablement posséder l'aspect paléocène.

Ainsi, on ne doit avoir de doutes sur la présence dans la région de la chaîne du Guissar de dépôts paléocènes, caractérisés—ce qui est d'un grand intérêt—par la faune du type volgien de la plate-forme russe. A mon avis, on peut tirer d'ici deux conclusions suivantes: 1) les couches à *Ostrea hemiglobosa* se rapportent évidemment au paléogène, de quoi d'ailleurs personne ne doutait dans ces derniers temps à l'exception de A. V. Peivé ([10]); 2) les calcaires aux *Corbulidae* gisant au-dessous de marnes à la faune paléocène sont aussi à rapporter au paléocène comme l'a fait de son temps N. F. Bézobrazova ([3]).

La raison en est, outre la présence de la faune possédant d'après O. S. Vialov l'aspect incontestablement paléogène, dans deux circonstances suivantes: 1) le passage des marnes en des calcaires s'accomplit partout progressivement, de sorte que ceux-ci semblent entrer dans le cycle de dépositions paléogènes. Il est intéressant que les changements faciaux des calcaires le long de la chaîne du Guissar correspondent souvent aux changements faciaux des horizons inférieurs des couches paléogènes superposées, n'ayant par contre aucun rapport aux changements faciaux des sédiments qui sont sans doute du crétacé supérieur; 2) on sait que les calcaires de la zone frontière, au sud-ouest du Tadjikist n et de l'Usbekistan reposent souvent sur les couches gypseuses de couleur rouge qui ne sont pourtant nulle part d'une épaisseur considérable. Autant que je sache, personne n'a pourtant signalé la brèche—conglomerat stratigraphique bâtie de fragments de grès sénoniens de couleur verdâtre et de forme irrégulière unis par un ciment calcaire-dolomite qui se trouve à la base de calcaires au-dessus de roches rouges; la brèche a une épaisseur de 1.5—2 *m*. Nous avons suivi de Goulieb jusqu'à Khotchilior (70—80 km) et partout où affleure la base de calcaires, elle est à voir tout-à-fait distinctement. Dans la région de la dépression de Baïssune la brèche n'est point à voir, tandis qu'on y trouve par-ci par-la, comme N. P. Cherraskov l'a déjà signalé, une discordance d'érosion (les couches de couleur rouge font exception) entre les calcaires et les couches gisant plus bas (la gorge Ak-Kaptchigaï dans le pli d'Agate).

Ainsi, il est tout-à-fait clair que la lacune entre la déposition des couches sénoniennes et celle des calcaires aux *Corbulidae* est plus grande qu'on ne le supposait. Il est bien probable, que cette lacune correspond à l'âge danois. Il est vraisemblable qu'il y avait une regression complète de la mer et un soulèvement des couches dans la zone d'érosion.

En ce qui concerne les indications sur la présence dans la partie inférieure des calcaires de la faune du crétacé supérieur [S. N. Michailovskij ([9]), O. S. Vialov, d'après une communication de A. P. Bouraček ([4])], il paraît que c'est une erreur. O. S. Vialov affirme que de telles trouvailles se rapportent aux lieux où l'épaisseur des calcaires atteint au lieu de 60—80 *m* habituels jusqu'à 200—300 m. Les calcaires aux *Corbulidae* n'atteignent nulle part cette épaisseur, mais dans un nombre d'endroits les grès senoniens verdâtres sont facialement remplacés par des calcaires également verdâtres et compactes, sableux dans la partie supérieure; ils se confondent complètement en relief avec les calcaires aux *Corbulidae* en formant une rude couche et lorsque nous avons vu pour la première fois (près du kichlak Chargoune) une coupe pareille, nous avons cru tout d'abord, n'ayant pas trouvé la brèche au premier coup, que nous avions à faire avec un redoublement tectonique de l'épaisseur. Il est évident que la faune du crétacé supérieur découverte juste dans les endroits d'un pareil accroissement de l'épaisseur fut trouvée non pas dans

les calcaires aux *Corbulidae*, mais dans les couches inférieures, dont l'appartenance au crétacé supérieur ne fait douter personne.

Après la découverte de la faune paléocène de la région du Volga dans le toit des calcaires et des différents *Corbula* et autres dans ces calcaires mêmes, parmis lesquels des espèces déjà connues sont typiques pour le paléogène, il est superflu de retenir pour ces calcaires la dénomination du «horizon de Boukhara», proposée par O. C. Vialov ([4], [5]) et bien commode pour les buts de la géologie pratique comme correspondant aux couches facialement continues, et caractérisées par une faune déterminée. Il faut les nommer, conformément aux subdivisions acceptées, paléocènes ou paléogènes inférieures. Il est bien possible, qu'au sud du Tadjikistan les horizons inférieurs d'une assise épaisse (150—170 m) de gypse, calcaire et grès, dépourvue de fossiles [l'épaisseur de Sanglak, d'après B. M. Zdorik ([7])], superposée au sénonien superieur, correspondent tout de même au crétacé supérieur.

Institut scientifique
des engrais minéraux.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 7. V. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] А. Д. Архангельский, Труды Геол. ком., нов. серия, I, вып. 151 (1916). [2] А. Д. Архангельский, Изв. Геол. ком., 36 (1917). [3] Н. Ф. Безобразова, Бюл. Ср.-Аз. район. геол.-разв. упр., № 3 (1930). [4] О. С. Вялов, C. R. Acad. Sci. URSS, I № 1 (1934). [5] O. S. Vialov, Zentralblatt f. Min. etc., Abt. B, № 12 (1934). [6] Б. М. Здорик, Удобрение и урожай, № 6 (1930). [7] Б. М. Здорик, Тр. Научн. ин-та по удобр., I т., ч. II, вып. 100 (1932). [8] Н. А. Кудрявцев, Тр. Нефт. геол.-разв. ин-та, серия А, вып. 23 (1932). [9] С. Н. Михайловский, Зап. Горн. ин-та, V, вып. 2—3 (1914). [10] А. В. Пейве, Бюл. Моск. о-ва исп. прир., XI, № 4 (1934). [11] Н. П. Туаев и Н. А. Швембергер, Информац. сборник Нефт. геол.-разв. ин-та (1933). [12] Н. П. Хераскова, Тр. Научн. ин-та по удобр., I т., ч. II, вып. 100 (1932). [13] П. К. Чихачев, Изв. ГГРУ, 50, вып. 35 (1931). [14] П. К. Чихачев, Тр. Тадж. комплексн. экспедиции, вып. IV (1934). [15] М. С. Швецов, Бюлл. Моск. о-ва исп. прир., V, № 3—4 (1927). [16] М. С. Швецов, Тр. Геол. научн.-иссл. ин-та при физ. мат. фак. I Моск. гос. ун-та (1929).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XIV, № 2

ZOOLOGY

MICROREFLECTORS IN THE SKIN OF FISHES

By D. TRETIAKOV

(Communicated by I. I. Schmalhausen, Member of the Academy, 20. XI. 1936)

In 1924 Ballowitz published his observations on the integument of the garfish (*Belone acus* and *B. vulgaris*), reporting on the interesting colour effect of chromatophore apparatuses consisting of a melanophore branching out in the form of a star and a plate composed of a small cells,—iridocytes that cover it. The iridocytes are situated in the alveoli of the outer surface of the melanophore, and that is why on examining a surface preparation the central part of the melanophore appears to be covered with a delicate pigmented lattice made up of hexagonal meshes. This lattice consists of pigmented folds of the melanophore plasms which penetrate between the iridocytes. In the living or in the fresh fish, the iridocytes, when examined under the microscope, appear as shining little blue lanterns.

The phenomenon of reflected glittering noted by the author referred to above, I find also in the Black Sea garfish (*Belone acus euxini* Popov). Its dark-coloured back, is traversed by three longitudinal, very dark stripes, a mediodorsal one, accompanied by two narrower ones. Besides this, a broad dark stripe runs along the lateral surface of the body, above the margin of the silver-hued ventral surface. All of these five dark stripes are characterized by a dense distribution of melanophores, connected by the terminal parts of their outgrowths to form a syncytium. In the three intermediate brighter stripes, isolated melanophores are to be observed. These stripes, covered with iridocytes, emit an especially bright light, although the blue gleam is to be noted also in the case of the dark stripes. Although individual light points cannot be made out without the aid of the microscope, the steel-blue tinge of the back in the living garfish is due to the combined effect of all these microreflectors. In preserved specimens it rapidly disappears, while examination under the microscope shows the bluish gleam of the iridocytes to persist even after the specimen has been kept for four or five months in formalin or a year in alcohol, although it is not so intense and is not observed in every melanophore.

I find the blue gleam also in the Black Sea grayling (*Atherina mochon pontica* Eichw.). As early as 1926 I recorded the connection existing between the melanophores and the small iridocytes resembling epithelial cells and located between the pigmented folds of the melanophore. No guanin, however, could be detected in the iridocytes, for these observations were made

on fixed material. Yet, observations made on living specimens during the years following have convinced me that the melanophores which cover the scales of the dorsal half of the body are permanently capable of emitting the bluish gleam. There are the melanophores situated on the posterior margin of the scales and frequently arranged into parallel rows, that act as micro-reflectors. Sometimes every row is found to be covered with an unbroken plate of iridocytes. It is the easiest to observe this bluish gleam by placing the fish under a compound microscope or under a simple magnifying glass with its head turned towards the source of light. A glittering rhomboid figure is then to be seen on every scale of the back. The entire back looks as if covered with a coloured mosaic of glittering zigzag lines, alternating with grayish spaces. In some few spots the reflection of the iridocytes is yellow or pink in colour.

The blue shade of the skin colour in the grayling cannot be discerned by the unaided eye. In other parts of the body, where I observed a syncitium-like arrangement of the melanophores with adjacent small cells, it cannot be detected even with the aid of the microscope. In such places, the chromatophores apparently serve merely to protect the internal organes from light.

The Black Sea herring species (*Caspialosa tanaica*, *C. pontica* Eichw.) show iridescent colour shades on the silver-hued background of the ventral surface of the body. However, this blue iridiscence is to be observed also in some places on the dark dorsal side of the body. A microscopic examination of such places shows that the greater part of the star-shaped melanophores are covered with gleaming blue dots. Even in herrings whose skin has already dried up, this colour effect is observed after they have remained for a few hours in the air. Moreover, it may be noted also in the commercial salt herring. And, lastly, I may mention that I have observed this colour effect also in Caspian herrings brought to Odessa salted.

The blue gleam of the melanophores in herrings is due to the same cause as in the fishes referred to above, namely, to the iridocytes situated in the alveoli of the outer surface of the melanophores. The lattice formed by the walls of the alveoli, is made up of oval meshes with their longitudinal axes oriented radially. Yet cross sections show that the iridocytes in this case, too, resemble epithelial cells.

I have noted similar microreflectors also in the skin of other Black Sea clupeids, namely in the Black Sea sardelle (*Harengula delicatula*) and in the anchovy (*Engraulis encrassicolus* L.), their quantity being so considerable, that their effect is discernible even macroscopically, the sardelle and especially the anchovy showing a bright blue gleam on the dark dorsal surface of the body. However, in these latter two species, the melanophores of the microreflectors do not form a lattice pattern, their iridocytes being only adjacent to their surface, too far apart to form a plate, low and unequally distributed.

In the mackerel (*Scomber scomber*), the dorsal surface is covered with dark transverse stripes with bluish intermediate spaces between the latter. In these interspaces are situated single densely pigmented melanophores with short thick outgrowths. In the spaces between the points of origin of these outgrowths, some few iridocytes are found which reflect a faintly glittering blue color. In the dark stripes, the star-shaped melanophores are distributed very densely, forming a continuous layer. Above the latter, numerous iridocytes are scattered, which emit a bluish, or more frequently, a bright-green or yellow gleam. Above the lateral line, where the dark stripes join

each other, the yellow colour shade predominates. The glitter and blending of all of these colours is best appreciated by examining the fish at low magnification in sunlight.

Microreflectors, especially of yellow and greenish colour shades, are found also in *Trachurus trachurus*. Just as in the sardelle, they are scattered on the outer surface of the melanophores and hence do not form a lattice pattern on them.

When the fish has been at rest in sea-water for several hours, all of the pigment of the melanophores is concentrated in the body of the melanophore, while the outgrouths are left without melanin. The iridocytes, which are now left without a dark background, continue to glitter in the colourless or lipocytes-containing interspaces between the bodies of the melanophores. Especially striking is this spectacle as presented by the garfish. The melanophores with the iridocyte plate on their bodies continue to emit a deep blue-coloured gleam. Those iridocytes, however, which formerly have been only on the outgrowths of the melanophore, now appear as bright blue or yellow dots surrounding its black body.

A concentration of the melanin is to be observed also in *Trachurus trachurus*, *Harengula delicatula* and *Engraulis encrassicolus*, while the iridocytes continue to glitter in the interspaces between the melanophores. In the herring and in the mackerel, I have never observed such a concentration of the melanin.

In the sea scorpion (*Trachinus vipera*), Ballowitz described melanophores with few adjacent iridocytes, which he termed melaniridosomes. In the Black Sea species of the sea scorpion (*Tr. draco*), I also find similar melaniridosomes with a faint green gleam on the iridescent green-blue spots scattered over the body between dark-yellow oblique spots and stripes.

Although the melanophore of the melaniridosome has but few broad outgrowths and the relatively large iridocytes which form no epithelium lie between the points of origin of the outgrowths, these structure are apparently to be regarded as microreflectors.

Microreflectors are rather common chromatophore apparatuses which are peculiar to fishes and have an important bearing on adaptation in plankton fishes. From the point of view of phylogeny, they might perhaps be regarded as those initial structures which, after further specialization and association with epithelial elements, have differentiated finally to evolve into the organs of luminescence in fishes. They have also a practical value inasmuch as the retention of the gleam from the microreflectors may serve as an indicator of the freshness of fishes and of the quality of their preservation. This last-mentioned problem would seem to deserve a special investigation.

Zoologo-biological Institute.
Odessa.

Received
20. XI. 1936.

REFERENCES

[1] E. Ballowitz, ZS. wiss. Zool., 104 (1913). [2] E. Ballowitz, ZS. f. Zellen- und Gewebelehre, 1 (1924). [3] D. Tretiakoff, Zool. Anz., 66 (1926).